SESSION de 1998

## COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

*Epreuve commune aux ENS de Lyon et de Cachan*

Durée : 4 heures

***L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé pour toutes les épreuves d'admissibilité, sauf pour les épreuves de français et de langues. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.***

On considère dans la suite $\mathbf{R}^n$ muni du produit scalaire usuel $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, où $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$. La norme (euclidienne) de $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est $\|x\| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$. La métrique sur $\mathbf{R}^n$ est la distance usuelle $d(x, y) = \|y - x\|$.

Si $C$ est une partie non vide de $\mathbf{R}^n$ et $x$ un point de $\mathbf{R}^n$, on pose $d_C(x) = \inf_{c \in C} d(x, c)$. La fonction $d_C : \mathbf{R}^n \to [0, +\infty[$ est donc la fonction distance à $C$. On rappelle que $d_C$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbf{R}^n$, c'est-à-dire $|d_C(y) - d_C(x)| \leq d(x, y)$, pour tout $x, y \in \mathbf{R}^n$.

Dans ce problème, on se propose d'étudier les fonctions $f : U \to \mathbf{R}$, définies sur un ouvert $U$ de $\mathbf{R}^n$, qui sont de classe $\mathrm{C}^1$ et qui vérifient :

$$\forall x \in U, \|\operatorname{grad} f(x)\| = 1,$$

où $\operatorname{grad} f(x)$ est la gradient de $f$ en $x$ défini par :

$$\operatorname{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) \in \mathbf{R}^n.$$

Si on note par $df(x) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ la dérivée de $f$ en $x$, on a donc :

$$\forall v \in \mathbf{R}^n, df(x)(v) = \langle \operatorname{grad} f(x), v\rangle.$$

### Partie I. Quelques exemples.

**I.1.** Soit $a \in \mathbf{R}^n$, montrer que la fonction $d_a : \mathbf{R}^n \to [0, +\infty[, x \mapsto d(x, a)$ est de classe $\mathrm{C}^1$ sur $\mathbf{R}^n \setminus \{a\}$.

**I.2.** Soit $S$ un segment compact dans $\mathbf{R}^n$. Montrer que la fonction $d_S$ est de classe $\mathrm{C}^1$ sur $\mathbf{R}^n \setminus S$. [Indication : Se ramener au cas $S = [-a, a] \times \{0\} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$, avec $a \geq 0$.]

**I.3.** Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, où $[a, b] \subset \mathbf{R}$. On suppose que $f$ est partout dérivable sur $]a, b[$ (sans nécessairement supposer que $f'$ soit continue) et que $|f'(t)| = 1$, pour tout $t \in ]a, b[$. Montrer que l'on a soit $f(t) = f(a) + (t - a)$, pour tout $t \in [a, b]$, soit $f(t) = f(a) + (a - t)$, pour tout $t \in [a, b]$.

## Partie II. Différentiabilité de fonctions distance.

*Dans cette partie, on considère une partie $C$ de $\mathbf{R}^n$.*

**II.1.** Montrer que $d_C = d_{\bar{C}}$, où $\bar{C}$ est la fermeture de $C$ dans $\mathbf{R}^n$.

*Dans la suite de cette partie, on supposera que $C$ est un fermé de $\mathbf{R}^n$.*

**II.2.** Montrer que si $x \in \mathbf{R}^n$, il existe $c \in C$ tel que $d_C(x) = d(c, x)$.

*Pour $x \in \mathbf{R}^n$, on pose $C_x = \{c \in C \mid d(c, x) = d_C(x)\}$.*

**II.3.** Soit $x_k \in \mathbf{R}^n$ une suite qui converge vers un point $x_\infty \in \mathbf{R}^n$. Si $y_k \in C_{x_k}$, pour tout $k \in \mathbf{N}$, montrer que l'on peut extraire de la suite $y_k$ une sous-suite qui converge vers un point $y_\infty \in C_{x_\infty}$.

**II.4.** Soit $x \in \mathbf{R}^n$, on définit la fonction $p_{x,C} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ par :

$$p_{x,C}(h) = \inf_{c \in C_x} \langle x - c, h \rangle = \inf\{\langle x - c, h \rangle \mid c \in C, d(x, c) = d_C(x)\}.$$

**II.4.a)** Montrer que tout $h \in \mathbf{R}^n$, on peut trouver un $c \in C_x$ tel que $p_{x,C}(h) = \langle x - c, h \rangle$.

*On note par $d_C^2$ le carré de la fonction réelle $d_C$, c'est-à-dire $d_C^2(x) = (d_C(x))^2$.*

**II.4.b)** Montrer que l'on a :

$$\forall h \in \mathbf{R}^n, d_C^2(x + h) \leq d_C^2(x) + 2p_{x,C}(h) + \|h\|^2.$$

**II.4.c)** Montrer que :

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{|d_C^2(x + h) - d_C^2(x) - 2p_{x,C}(h)|}{\|h\|} = 0.$$

[Indication : Utiliser **II.3** et **II.4.b**.]

**II.4.d)** En déduire que $d_C^2$ est différentiable en $x \in \mathbf{R}^n$ si et seulement si $C_x$ est réduit à un seul point. [Indication : On remarquera que si $p_{x,C}$ est linéaire, on doit avoir $p_{x,C}(-h) = -p_{x,C}(h)$.]

**II.5.** Montrer que $d_C$ est différentiable sur $\mathbf{R}^n \setminus C$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ il existe un unique $c \in C$ tel que $d(x, c) = d_C(x)$.

**II.6.** On suppose que $d_C$ est différentiable sur $\mathbf{R}^n \setminus C$. Exprimer $\operatorname{grad} d_C(x)$, pour $x \in \mathbf{R}^n \setminus C$. En déduire que $d_C$ est de classe $\mathrm{C}^1$ sur $\mathbf{R}^n \setminus C$. Que vaut la norme de $\operatorname{grad} d_C(x)$, pour $x \in \mathbf{R}^n \setminus C$ ?

## Partie III. Etude des fonctions de classe $\mathrm{C}^2$ de gradient unitaire.

**III.1.** Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ un arc paramétré de classe $\mathrm{C}^1$. On rappelle que la longueur $l(\gamma)$ de $\gamma$ est donnée par :

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

Montrer que si l'on a $l(\gamma) = \|\gamma(b) - \gamma(a)\|$, alors $\gamma([a,b])$ est le segment de $\mathbf{R}^n$ joignant $\gamma(a)$ à $\gamma(b)$. [Indication : On supposera $\gamma(a) = 0$ et on écrira $\gamma(t) = \sum_{i=1}^n \gamma_i(t)e_i$ avec $\gamma_i(t) \in \mathbf{R}$ et où $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de $\mathbf{R}^n$ avec $e_1 = \gamma(b)/\|\gamma(b)\|$.]

*Dans cette partie, on considère une fonction $f : U \to \mathbf{R}$, où $U$ est un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $f$ est, pour commencer, de classe $C^1$, avec $\|\operatorname{grad} f(x)\| = 1$, pour tout $x \in U$.*

**III.2.** Montrer que pour tout arc paramétré $\gamma : [a,b] \to U$ de classe $C^1$, on a :

$$|f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))| \leq l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt.$$

En déduire que la restriction de $f$ à un convexe contenu dans $U$ est 1-lipschitzienne.

*Dans la suite de cette partie, on supposera, de plus, que la fonction $f : U \to \mathbf{R}$ est de classe $C^2$ et on notera par $\mathcal{E}_f$ l'équation différentielle $\gamma'(t) = \operatorname{grad} f(\gamma(t)), t \in \mathbf{R}$.*

S'il le désire, le candidat pourra supposer que $n = 2$ et donc que $U$ est un ouvert de $\mathbf{R}^2$. Les arguments sont en fait valable en toute dimension.

**III.3.** Montrer que par tout point $x \in U$ passe une solution locale $\gamma : [-\epsilon, \epsilon] \to U$, avec $\gamma(0) = x$, de l'équation différentielle $\mathcal{E}_f$.

**III.4.** Soit $\gamma : [a,b] \to U$ une solution de l'équation différentielle $\mathcal{E}_f$. Montrer que $\gamma([a,b])$ est un segment et que l'on a :

$$\forall s \in [a,b], f(\gamma(s)) = f(\gamma(a)) + s - a \text{ et } \gamma(s) = \gamma(a) + (s-a)\operatorname{grad} f(\gamma(a)).$$

**III.5.** Soit $x \in U$ fixé. On note $]a_x, b_x[$ le plus grand intervalle de $\mathbf{R}$ contenant 0 et contenu dans l'ouvert $\{s \in \mathbf{R} \mid x + s \operatorname{grad} f(x) \in U\}$ de $\mathbf{R}$. Montrer que $]a_x, b_x[ \to U, s \mapsto x + s \operatorname{grad} f(x)$ est la solution maximale de $\mathcal{E}_f$, passant par $x$ pour $s = 0$, et que $f(x + s \operatorname{grad} f(x)) = f(x) + s$ pour tout $s \in ]a_x, b_x[$.

**III.6. Première application**

**III.6.a)** Soient $v, x \in \mathbf{R}^n$ avec $\|v\| = 1$. Soit $y \in \mathbf{R}^n$ tel que $\forall s \geq 0, d(y, x + sv) \geq s$, montrer que l'on a $< y - x, v > \leq 0$.

**III.6.b)** Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ de classe $C^2$ et telle que $\|\operatorname{grad} f(x)\| = 1$, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$. Montrer que $f$ est affine. [Indication : On montrera que pour $x, y \in \mathbf{R}^n$ tels que $f(y) = f(x)$, on a $d(y, x + s \operatorname{grad} f(x)) \geq |s|$.]

**III.7. Seconde application** Soit $C \subset \mathbf{R}^n$ un fermé. On suppose que $d_C$ est de classe $C^2$ sur $\mathbf{R}^n \setminus C$. Montrer que $C$ est convexe. [Indication : On cherchera à exprimer $C$ comme une intersection de demi-espaces affines.]

## Partie IV. Etude des fonctions de classe $C^1$ de gradient unitaire.

Dans la partie précédente, on a essentiellement obtenu des résultats pour des fonctions de classe $C^2$. Cette partie montre comment obtenir les mêmes résultats pour des fonctions qui ne sont que de classe $C^1$.

*Dans la suite, on considère une fonction $f : U \to \mathbf{R}$, où $U$ est un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $f$ est de classe $C^1$, avec $\|\operatorname{grad} f(x)\| = 1$, pour tout $x \in U$.*

Pour $x \in \mathbf{R}^n$ et $r \geq 0$, on note par $\bar{B}(x,r)$ la boule euclidienne fermée $\{y \in \mathbf{R}^n \mid \|y - x\| \leq r\}$.

Si $\bar{B}(x,r) \subset U$, on pose :

$$\theta(x,r) = \sup_{\|v\|=r} f(x+v) - f(x).$$

Dans ce cas, si $r' \leq r$, la quantité $\theta(x,r')$ est aussi définie.

*Dans la suite, on supposera que $\bar{B}(x,r) \subset U$ avec $r > 0$.*

**IV.1.** Montrer que $\theta(x,r) \leq r$. Pour $r' \to 0$, montrer que $\theta(x,r')/r'$ admet une limite que l'on déterminera.

**IV.2.** Montrer que, pour tout $y \in \bar{B}(x,r)$, on a $f(y) - f(x) \leq \theta(x,r)$. En déduire que $\theta(x,r) > 0$.

**IV.3.a)** Si $\|w\| = r/2$, montrer que $f(x+w) - f(x) + \theta(x+w, r/2) \leq \theta(x,r)$.

**IV.3.b)** En déduire qu'il existe $x_1 \in \bar{B}(x,r/2)$ tel que $\theta(x_1, r/2) \leq \theta(x,r)/2$.

**IV.4.a)** Construire par récurrence une suite $x_k \in \bar{B}(x,r)$, telle que $\theta(x_{k+1}, r/2^{k+1}) \leq \theta(x_k, r/2^k)/2$.

**IV.4.b)** Montrer que $\theta(x,r) = r$.

**IV.5.** Montrer qu'il existe $w \in \mathbf{R}^n$, dépendant de $r$, avec $\|w\| = 1$ et $f(x+rw) = f(x) + r$. En déduire que $\operatorname{grad} f(x+tw) = w$, pour $t \in [0,r]$.

**IV.6.** Si $x \in U$ et $]a_x, b_x[$ est le plus grand intervalle de $\mathbf{R}$ contenant 0 et contenu dans l'ouvert $\{s \in \mathbf{R} \mid x + s \operatorname{grad} f(x) \in U\}$ de $\mathbf{R}$. Montrer que $f(x + s \operatorname{grad} f(x)) = f(x) + s$ pour tout $s \in ]a_x, b_x[$.

**IV.7.** Montrer que le résultat de **III.6.b)** reste encore valable, si on suppose que $f$ est seulement de classe $C^1$.

**IV.8. (Théorème de Motzkin)** Soit $C \subset \mathbf{R}^n$ un fermé. Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Le fermé $C$ est convexe.

(ii) Pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, il existe un unique $c \in C$ tel que $d(x,c) = d_C(x)$.

(iii) La fonction $d_C$ est de classe $C^1$ sur $\mathbf{R}^n \setminus C$.